Beycan Kahraman
040020337

Bölünmüş Farklar Yöntemi ile Elde Edilen Formülden Yararlanılarak Newton İleri Fark Formülünün Bulunması

Bölünmüş Farklar Yöntemini kullanarak $f(x)$ fonksiyonunun aşağıdaki şekilde ifade edilebileceğini derste göstermiştik.

$$f(x)=f(x_0)+\sum_{k=1}^{n} f[x_0,x_1,x_2,\ldots,x_k](x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_{k-1})$$

Ayrıca derste, k. dereceden verilen bir farkın ileri fark operatörü kullanılarak aşağıdaki gibi ifade edilebileceği de gösterilmiştir.

$$f[x_0,x_1,x_2,\ldots,x_k]=\frac{1}{k!h^k}\Delta^k f(x_0)$$

(Verilen bu ifadenin doğruluğu tümevarım ile gösterilebilir.)

Yukarıda verilenlerden yararlanarak Newton İleri Fark Formülü'nü bulalım.

$f[x_0,x_1,x_2,\ldots,x_k]$ ifadesini ilk ifadede yerine koyarsak, toplam içindeki ifade aşağıdaki gibi olur.

I $\quad \Delta^k f(x_0)(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_{k-1}) / (k!\, h^k)$

(a) $\quad x - x_0 = hs$ olduğu bilinmektedir. Ayrıca $h = x_{i+1} - x_i$, buradan $x_i - x_0 = ih$. (b)
a ve b taraf tarafa çıkartılırsa $x - x_i = h(s - i)$. Bulunan bu son ifade kullanılarak, I'daki $(x-x_i)$ çarpımları şeklindeki ifade s'ler türünden aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_{k-1}) = h^k s(s-1)(s-2)\ldots(s-(k-1))$$

Denklemin sağ yanının pay ve paydasını $(s - k)(s - (k+1))(s - (k+2))\ldots2.1$ ifadesi ile çarpalım

II $\quad (x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_{k-1}) = \dfrac{h^k s(s-1)\ldots2.1}{(s-k)(s-(k+1))(s-(k+2))\ldots2.1} = \dfrac{s!\, h^k}{(s-k)!}$

Bulduğumuz II ifadesini I denkleminde yerine yazıp, faktöriyelli ifadeleri binom açılımı olarak gruplarsak, h^k ifadeleri sadeleşir ve

$\binom{s}{k}\Delta^k f(x_0)$ ifadesini elde ederiz

Sonuç olarak Newton İleri Fark Formülü aşağıdaki son halini alır.

$$f(x)=f(x_0)+\sum_{k=1}^{n}\binom{s}{k}\Delta^k f(x_0)$$