Beycan Kahraman
040020337

3. Mertebeden Türevin Yaklaşık Olarak Hesaplanması

2. Mertebeden türev hesabında Taylor açılımından yararlanılarak;

$$
\begin{aligned}
& f(x_0 + h) = f(x_0) + f`(x_0).h + f``(x_0).h^2 / 2! + f```(x_0).h^3 / 3! + H(h^4) \text{ ve} \\
+ \quad & f(x_0 - h) = f(x_0) - f`(x_0).h + f``(x_0).h^2 / 2! - f```(x_0).h^3 / 3! - H(h^4)
\end{aligned}
$$

$$f(x_0 + h) + f(x_0 - h) = 2.f(x_0) + 2.f``(x_0).h^2$$

Burada hataların yaklaşık olarak birbirlerini götürdükleri düşünülmüştür. Buna göre:

$f``(x_0) = \quad (f(x_0 + h) - 2.f(x_0) + f(x_0 - h)) / h^2$ olarak bulunabilir.

Benzer şekilde bir fonksiyonun 3. mertebeden türevine ulaşmak için yine Taylor açılımlarından yararlanalım.

$$
\begin{aligned}
& f(x_0 + h) = f(x_0) + f`(x_0).h + f``(x_0).h^2 / 2! + f```(x_0).h^3 / 3! + H(h^5) \text{ ve} \\
- \quad & f(x_0 - h) = f(x_0) - f`(x_0).h + f``(x_0).h^2 / 2! - f```(x_0).h^3 / 3! - H(h^5)
\end{aligned}
$$

$$f(x_0 + h) - f(x_0 - h) = 2.f`(x_0).h + 2.f```(x_0).h^3 / 3! + 2.H(h^5)$$

Burada hatanın derecesi değişmemiş olmakla birlikte bundan sonraki adımlarda $2.H(h^5)$ yerine $O(h^5)$ ifadesi kullanılacaktır. Buna göre:

$$f```(x_0) = 3.(f(x_0 + h) - f(x_0 - h) - 2.f`(x_0).h - O(h^5)) / h^3$$

Gelinen son noktada $f`(x_0)$ değeri istenmeyen bir değer olarak yer almaktadır. Bu değeri yok etmek için Taylor açılımından yararlanamamaktayız. (0 = 0 eşitliğine ulaşmaktayız.)

Burada önceden öğrendiğimiz 3 nokta için bir fonsiyonun türevini yaklaşık oalrak hesaplayan formülleri kullanalım. Bu formüllerden ilki olan

$f`(x_0) = (f(x_0 + h) - f(x_0 - h)) / 2h - H$ formülü işimizi görmemektedir.

Bunun yerine çözüm için kullanılabilen ikinci denklemi kullanmaya kalkarsak;

$$f`(x_0) = (-3.f(x_0) + 4.f(x_0 + h) - f(x_0 + 2h)) / 2h - h^2.f```(\xi_0) / 3$$

için bulduğumuz yukarıdaki denklem

$$f```(x_0) = 3.f(x_0 + h) - 3.f(x_0 - h) + (9.f(x_0) - 12.f(x_0 + h) + 3.f(x_0 + 2h)) + \text{hata}$$

halini alır ki buradan aşağıdaki çözüme ulaşılır. Burada;

hata = $h^2.f```(\xi_0) / 3$ olarak almamız gereklidir. Çünkü buradaki hata diğer $O(h^5)$ hatasına göre oldukça büyüktür.

Bir fonksiyonun bir noktadaki üçüncü dereceden türevini yaklaşık olarak veren ifade:

$$f'''(x_0) = 3.(- f(x_0 - h) + 3.f(x_0) - 3.f(x_0 + h) + f(x_0 + 2h)) / h^3 + h^2.f'''(\xi_0) / 3$$

olarak bulunmuştur.

İrdeleme: Yukarıdaki ifadeyi hazırladığım C programında denediğimde her zaman hatayla karşılaştım. Çıkan sonuç olması gereken değerin her zaman üç katı civarında çıkıyordu. Buna göre aranan denklemin:

$$f'''(x_0) = (- f(x_0 - h) + 3.f(x_0) - 3.f(x_0 + h) + f(x_0 + 2h)) / h^3 + h^2.f'''(\xi_0) / 3$$

olması gerekiyordu. Yine de yaptığım işlemleri adım adım kontrol ettiğimde bu 3'e bölme hatasının sebebini bir türlü göremedim.

NOT :

Kaynak : http://www.geocities.com/beycan_kahraman/Odevler/2005/SayisalIII.zip
Program : http://www.geocities.com/beycan_kahraman/Odevler/2005/SayisalProII.zip