Beycan Kahraman
040020337

BİR FONKSİYONUN TÜREVİNİ YAKLAŞIK OLARAK HESAPLAMA (5 Nokta için)

$x_1 = x_0+h,\ x_2 = x_1+h,\ x_3 = x_2+h,\ x_4 = x_3+h$ olmak üzere,

Herhangi bir fonksiyonun 5 nokta için Lagrange açılımını yaparsak;

$$f(x) = f(x_0).L_{4,0}(x) + f(x_1).L_{4,1}(x) + f(x_2).L_{4,2}(x) + f(x_3).L_{4,3}(x) + f(x_4).L_{4,4}(x) + H$$

$$H = (x - x_0)\ (x - x_1)\ (x - x_2)\ (x - x_3)\ (x - x_4).f^{(5)}(\xi(x))\ /\ 5!$$

olduğuna göre, lagrange polinomlarını oluşturalım:

$$L_{4,0}(x) = (x - x_1)\ (x - x_2)\ (x - x_3)\ (x - x_4)\ /\ (x_0 - x_1)\ (x_0 - x_2)\ (x_0 - x_3)\ (x_0 - x_4)$$

$$L_{4,1}(x) = (x - x_0)\ (x - x_2)\ (x - x_3)\ (x - x_4)\ /\ (x_1 - x_0)\ (x_1 - x_2)\ (x_1 - x_3)\ (x_1 - x_4)$$

$$L_{4,2}(x) = (x - x_0)\ (x - x_1)\ (x - x_3)\ (x - x_4)\ /\ (x_2 - x_0)\ (x_2 - x_1)\ (x_2 - x_3)\ (x_2 - x_4)$$

$$L_{4,3}(x) = (x - x_0)\ (x - x_1)\ (x - x_2)\ (x - x_4)\ /\ (x_3 - x_0)\ (x_3 - x_1)\ (x_3 - x_2)\ (x_3 - x_4)$$

$$L_{4,4}(x) = (x - x_0)\ (x - x_1)\ (x - x_2)\ (x - x_3)\ /\ (x_4 - x_0)\ (x_4 - x_1)\ (x_4 - x_2)\ (x_4 - x_3)$$

olarak bulunur. Buradan, f(x)'in türevine bakarsak,

$$f\,'(x) = f(x_0).L'_{4,0}(x) + f(x_1).L'_{4,1}(x) + f(x_2).L'_{4,2}(x) + f(x_3).L'_{4,3}(x) + f(x_4).L'_{4,4}(x) + H'$$

$$\begin{aligned} H' = [&(x - x_1)\ (x - x_2)\ (x - x_3)\ (x - x_4) + (x - x_0)\ (x - x_2)\ (x - x_3)\ (x - x_4) \\ &+ (x - x_0)\ (x - x_1)\ (x - x_3)\ (x - x_4) + (x - x_0)\ (x - x_1)\ (x - x_2)\ (x - x_4) \\ &+ (x - x_0)\ (x - x_1)\ (x - x_2)\ (x - x_3)\ \}.f^{(5)}(\xi(x))\ ]\ /\ 5! \\ &+ [\ (x - x_0)\ (x - x_1)\ (x - x_2)\ (x - x_3)\ (x - x_4).D_x\{\ f^{(5)}(\xi(x))\ \}]\ /\ 5! \end{aligned}$$

Yukarıda bulunan Lagrange Polinomlarının türevine bakarsak;

$$\begin{aligned} L'_{4,0}(x) = [&(x - x_1)\ (x - x_2)\ (x - x_3) + (x - x_1)\ (x - x_2)\ (x - x_4) + (x - x_1)\ (x - x_3)\ (x - x_4) \\ &+ (x - x_2)\ (x - x_3)\ (x - x_4)]\ /\ 24h^4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L'_{4,1}(x) = [&(x - x_0)\ (x - x_2)\ (x - x_3) + (x - x_0)\ (x - x_2)\ (x - x_4) + (x - x_0)\ (x - x_3)\ (x - x_4) \\ &+ (x - x_2)\ (x - x_3)\ (x - x_4)]\ /\ -6h^4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L'_{4,2}(x) = [&(x - x_1)\ (x - x_0)\ (x - x_3) + (x - x_1)\ (x - x_0)\ (x - x_4) + (x - x_1)\ (x - x_3)\ (x - x_4) \\ &+ (x - x_0)\ (x - x_3)\ (x - x_4)]\ /\ 4h^4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L'_{4,3}(x) = [&(x - x_1)\ (x - x_2)\ (x - x_0) + (x - x_1)\ (x - x_2)\ (x - x_4) + (x - x_1)\ (x - x_0)\ (x - x_4) \\ &+ (x - x_2)\ (x - x_0)\ (x - x_4)]\ /\ -6h^4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L'_{4,4}(x) = [&(x - x_1)\ (x - x_2)\ (x - x_3) + (x - x_1)\ (x - x_2)\ (x - x_0) + (x - x_1)\ (x - x_3)\ (x - x_0) \\ &+ (x - x_2)\ (x - x_3)\ (x - x_0)]\ /\ 24h^4 \end{aligned}$$

Böylece $L'_{4,i}(x_j)$, $\{i,j \in N^4\}$ değerlerini artık hesaplayabiliriz.

$L'_{4,0}(x_0) = -50h^3 / 24h^4 \quad = -25 / 12h$
$L'_{4,0}(x_1) = -6h^3 / 24h^4 \quad = -1 / 4h$
$L'_{4,0}(x_2) = 2h^3 / 24h^4 \quad = 1 / 12h$
$L'_{4,0}(x_3) = -2h^3 / 24h^4 \quad = -1 / 12h$
$L'_{4,0}(x_4) = 6h^3 / 24h^4 \quad = 1 / 4h$

$L'_{4,1}(x_0) = -24h^3 / -6h^4 \quad = 4 / h$
$L'_{4,1}(x_1) = 5h^3 / -6h^4 \quad = -5 / 6h$
$L'_{4,1}(x_2) = 4h^3 / -6h^4 \quad = -2 / 3h$
$L'_{4,1}(x_3) = -3h^3 / -6h^4 \quad = 1 / 2h$
$L'_{4,1}(x_4) = 8h^3 / -6h^4 \quad = -4 / 3h$

$L'_{4,2}(x_0) = -12h^3 / 4h^4 \quad = -3 / h$
$L'_{4,2}(x_1) = 6h^3 / 4h^4 \quad = 3 / 2h$
$L'_{4,2}(x_2) = 0$
$L'_{4,2}(x_3) = -6h^3 / 4h^4 \quad = -3 / 2h$
$L'_{4,2}(x_4) = 12h^3 / 4h^4 \quad = 3 / h$

$L'_{4,3}(x_0) = -8h^3 / -6h^4 \quad = 4 / 3h$
$L'_{4,3}(x_1) = 3h^3 / -6h^4 \quad = -1 / 2h$
$L'_{4,3}(x_2) = -4h^3 / -6h^4 \quad = 2 / 3h$
$L'_{4,3}(x_3) = -5h^3 / -6h^4 \quad = 5 / 6h$
$L'_{4,3}(x_4) = 24h^3 / -6h^4 \quad = -4 / h$

$L'_{4,4}(x_0) = -6h^3 / 24h^4 \quad = -1 / 4h$
$L'_{4,4}(x_1) = 2h^3 / 24h^4 \quad = 1 / 12h$
$L'_{4,4}(x_2) = -2h^3 / 24h^4 \quad = -1 / 12h$
$L'_{4,4}(x_3) = 6h^3 / 24h^4 \quad = 1 / 4h$
$L'_{4,4}(x_4) = 50h^3 / 24h^4 \quad = 25 / 12h$

Tüm bunları hesapladıktan sonra artık formüllerimizi çıkartabiliriz.

1. $f(x_0) = (-25f(x_0) + 48f(x_0 + h) - 36f(x_0 + 2h) + 16f(x_0 + 3h) - 3f(x_0 + 4h))/12h + h_0$
2. $f(x_1 = x_0+h) = (-3f(x_0) - 10f(x_0 + h) + 18f(x_0 + 2h) - 6f(x_0 + 3h) + f(x_0 + 4h))/12h + h_1$
3. $f(x_2 = x_0+2h) = (f(x_0) - 8f(x_0 + h) + 8f(x_0 + 3h) - f(x_0 + 4h))/12h + h_2$
4. $f(x_3 = x_0+3h) = (-f(x_0) + 6f(x_0 + h) - 18f(x_0 + 2h) + 10f(x_0 + 3h) + 3f(x_0 + 4h))/12h + h_3$
5. $f(x_4 = x_0+4h) = (3f(x_0) - 16f(x_0 + h) + 36f(x_0 + 2h) - 48f(x_0 + 3h) + 25f(x_0 + 4h))/12h + h_4$

Yukarıdaki denklemlerdeki h_i $\{i \in N^4\}$hatalarını aşağıdaki H' değerine göre hesaplarsak;

$$H' = [(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4) + (x - x_0)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4) + (x - x_0)(x - x_1)(x - x_3)(x - x_4) + (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)(x - x_4) + (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) \}.f^{(5)}(\xi(x))] / 5! + 0$$

olduğuna göre:

$h_0 = h^4.f^{(5)}(\xi_0) / 5$, $h_1 = -h^4.f^{(5)}(\xi_1) / 20$, $h_2 = h^4.f^{(5)}(\xi_2) / 30$,
$h_3 = -h^4.f^{(5)}(\xi_3) / 20$ ve $h_4 = h^4.f^{(5)}(\xi_4) / 5$

olarak bulunur.

Yukarıda bulduğumuz formüllerden 5. si için x_0 yerine $x_0 - 4h$ yazarsak

$f(x_0) \quad = -(3f(x_0 - 4h) - 16f(x_0 - 3h) + 36f(x_0 - 2h) - 48f(x_0 - h) + 25f(x_0))/12h + h_4$

elde edilir. Burada da h yerine –h yazdığımızda

$f(x_0) \quad = (-25f(x_0) + 48f(x_0 + h) - 36f(x_0 + 2h) + 16f(x_0 + 3h) - 3f(x_0 + 4h))/12h + h_4$

elde edilir ki bu ilk denklemin kendisidir.

Aynı şekilde 2. denklemde x_0 yerine $x_0 - h$ ve 4. denklemde x_0 yerine $x_0 - 3h$ yazarsak

$f(x_0) \quad = (-3f(x_0 - h) - 10f(x_0) + 18f(x_0 + h) - 6f(x_0 + 2h) + f(x_0 + 3h))/12h + h_1$

$f(x_0) \quad = (-f(x_0 - 3h) + 6f(x_0 - 2h) - 18f(x_0 - h) + 10f(x_0) + 3f(x_0 + h))/12h + h_3$

Yukarıdaki ikinci denklemde h yerine –h yazdığımızda üsttekine eşit olduğu açıktır.

Son olarak, bulunan 3. denklemde x_0 yerine $x_0 - 2h$ yazarsak;

$f(x_0) \quad = (f(x_0 - 2h) - 8f(x_0 - h) + 8f(x_0 + h) - f(x_0 + 2h))/12h + h_2$

ifadesi elde edilir.

Yukarıda bulduğumuz tüm denklemleri bir arada göstermek gerekirse:

Bir Fonksiyonun Türevini x_0 Civarında Yaklaşık Olarak

$f(x_0) = (f(x_0 - 2h) - 8f(x_0 - h) + 8f(x_0 + h) - f(x_0 + 2h))/12h + h^4.f^{(5)}(\xi_0) / 30$
$f(x_0) = (-3f(x_0 - h) - 10f(x_0) + 18f(x_0 + h) - 6f(x_0 + 2h) + f(x_0 + 3h))/12h - h^4.f^{(5)}(\xi_1) / 20$
$f(x_0) = (-25f(x_0) + 48f(x_0 + h) - 36f(x_0 + 2h) + 16f(x_0 + 3h) - 3f(x_0 + 4h)) /12h + h^4.f^{(5)}(\xi_2) / 5$

formüllerinden biri ile hesaplayabiliriz.

NOT:

i. İkinci formülü birinci ve üçüncü formülden elde etmeye çalıştım ama başaramadım.
ii. Ödevin bilgisayarda hazırlanmış hali için: http://www.geocities.com/beycan_kahraman/Odevler/2005/SayisalII.zip