Beycan Kahraman
040020337

SAYISAL YÖNTEMLER
Ödev 1

1. (1,1), (2,1), (3,0) noktalarından geçen S(x) spline

$S_0(x) = 1 + B(x-1) - D(x-1)^3, \qquad 1 \le x < 2,$

$S_1(x) = 1 + b(x-2) - 0.75(x-2)^2 + d(x-2)^3, \qquad 2 \le x \le 3$ için,

2 noktasında fonksiyonların aldıkları değerler (i), 2 noktasında fonksiyonların türevlerinin aldığı değerleri (ii) ve 2 noktasında fonksiyonların ikinci dereceden türevleri (iii) eşit olduğu bilindiğine göre;

i. $x = 2$ için;

$$1 + B(2-1) - D(2-1)^3 = 1 + b(2-2) - 0.75(2-2)^2 + d(2-2)^3$$
$$1 + B - D = 1$$
$$B = D$$

ii. $x = 2$ için;

$$B - 3D(2-1)^2 = b - 1.5(2-2) + 3d(2-2)^2$$
$$B - 3D = b \qquad \text{(i) kullanılarak}$$
$$-2B = b$$

$$B = D = -b/2$$

iii. $x = 2$ için;

$$-6D(2-1) = -1.5 + 6d(2-2)$$
$$-6D = -1.5$$
$$D = 0.25$$

=> $B = 0.25, \quad b = -0.5$ bulunur.

$S_1(x)$ spline fonksiyonu (3,0) noktasını sağlayacağından,

$x = 3$ için; $S_1(3) = 1 - 0.5(3-2) - 0.75(3-2)^2 + d(3-2)^3$

$= 1 - 0.5 - 0.75 + d$

$= 0$ olacağından, $\quad d = -0.25$ bulunur.

Sonuç olarak aranan spline fonksiyonu;

$S_0(x) = 1 + 0.25(x-1) - 0.25(x-1)^3, \qquad 1 \le x < 2,$

$S_1(x) = 1 - 0.5(x-2) - 0.75(x-2)^2 - 0.25(x-2)^3, \qquad 2 \le x \le 3$ 'dur.

---

2. f fonksiyonu için verilen spline fonksiyonları

$S_0(x) = 1 + Bx + 2x^2 - 2x^3, \qquad 0 \le x < 1,$

$S_1(x) = 1 + b(x-1) - 4(x-1)^2 + 7(x-1)^3, \qquad 1 \le x \le 2$ şeklinde verildiğine göre;

1 noktasında fonksiyonların aldıkları değerler (i), aynı noktada fonksiyonların türevlerinin aldığı değerleri (ii) eşit olduğu bilindiğinden;

i. $x = 1$ için;

$$1 + B.1 + 2.1^2 - 2.1^3 = 1 + b(1-1) - 4(1-1)^2 + 7(1-1)^3$$
$$1 + B + 2 - 2 = 1$$
$$B = 0$$

ii. $x = 1$ için; $B + 4.1 - 6.1^2 = b - 4(1-1)^1 + 21(1-1)^2$

$B = b + 2$ (i)

kullanılarak,

$b = -2$

Burada ulaşılan spline fonksiyonları:

$S_0(x) = 1 + 2x^2 - 2x^3$, $0 \le x < 1$,
$S_1(x) = 1 - 2(x-1) - 4(x-1)^2 + 7(x-1)^3$, $1 \le x \le 2$ olarak bulundu.

$f`(x) = S`(x)$ olduğu bilindiğine göre;

$f`(0) = S`(0) = S_0`(0) = 0$
$f`(2) = S`(2) = S_1`(2) = 11$ olarak bulunur.

3.

k	0	1	2	3	4
Zaman	0	3	5	8	13
Mesafe	0	225	383	623	993
Hız	75	77	80	74	72

i. Verilen değerlere göre n = 4 için aranan Hermite Polinomları:

$H_{2n+1}(x) = H_9(x) = \sum f(x_j).H_{n,j}(x) + \sum f`(x_j).\hat{H}_{n,j}(x)$
$H_9(x) = f(x_0)H_{4,0}(x) + f(x_1)H_{4,1}(x) + f(x_2)H_{4,2}(x) + f(x_3)H_{4,3}(x) + f(x_4)H_{4,4}(x) +$
$f`(x_0)\hat{H}_{4,0}(x) + f`(x_0)\hat{H}_{4,1}(x) + f`(x_0)\hat{H}_{4,2}(x) + f`(x_0)\hat{H}_{4,3}(x) + f`(x_0)\hat{H}_{4,4}(x)$

Burada;
$H_{n,j}(x) = [1 - 2(x - x_j)L'_{n,j}(x_j)].L^2_{n,j}(x)$ ve
$\hat{H}_{n,j}(x) = (x - x_j).L^2_{n,j}(x)$ olduğundan,

$L_{4,0}(x) = (x-3)(x-5)(x-8)(x-13) / (-3)(-5)(-8)(-13) = (x^4-29x^3+287x^2-147x+1560)/1560$
$L_{4,1}(x) = (x-0)(x-5)(x-8)(x-13) / (3)(-2)(-5)(-10) = (x^4-26x^3+209x^2-520x)/-300$
$L_{4,2}(x) = (x-0)(x-3)(x-8)(x-13) / (5)(2)(-3)(-8) = (x^4-24x^3+167x^2-312x)/240$
$L_{4,3}(x) = (x-0)(x-3)(x-5)(x-13) / (8)(5)(3)(-5) = (x^4-21x^3+119x^2-195x)/-600$
$L_{4,4}(x) = (x-0)(x-3)(x-5)(x-8) / (13)(10)(8)(5) = (x^4-16x^3+79x^2-120x)/5200$

$L'_{4,0}(x) = (4x^3-87x^2+574x-147)/1560$
$L'_{4,1}(x) = (4x^3-78x^2+418x-520)/-300$
$L'_{4,2}(x) = (4x^3-72x^2+334x-312)/240$
$L'_{4,3}(x) = (4x^3-63x^2+238x-195)/-600$
$L'_{4,4}(x) = (4x^3-48x^2+158x-120)/5200$

Bulunduktan sonra;

$H_{4,0}(x) = [1 - 2(x)\ (4x^3-87x^2+574x-147)/1560].(x^4-29x^3+287x^2-147x+1560)^2/2433600$
$H_{4,1}(x) = [1 - 2(x-3)\ (4x^3-78x^2+418x-520)/-300].(x^4-26x^3+209x^2-520x)^2/90000$

$H_{4,2}(x) = [1 – 2(x-5)\ (4x^3-72x^2+334x-312)/240].(x^4-24x^3+167x^2-312x)^2/57600$
$H_{4,3}(x) = [1 – 2(x-8)\ (4x^3-63x^2+238x-195)/-600].(x^4-21x^3+119x^2-195x)^2/360000$
$H_{4,4}(x) = [1 – 2(x-13)\ (4x^3-48x^2+158x-120)/5200].(x^4-16x^3+79x^2-120x)^2/27040000$
ve
$\hat{H}_{4,0}(x) = (x).(x^4-29x^3+287x^2-147x+1560)^2/2433600$
$\hat{H}_{4,1}(x) = (x-3).(x^4-26x^3+209x^2-520x)^2/90000$
$\hat{H}_{4,2}(x) = (x-5).(x^4-24x^3+167x^2-312x)^2/57600$
$\hat{H}_{4,3}(x) = (x-8).(x^4-21x^3+119x^2-195x)^2/360000$
$\hat{H}_{4,4}(x) = (x-13).(x^4-16x^3+79x^2-120x)^2/27040000$ olarak bulunur. Böylece

$$
\begin{aligned}
H_9(x) = {} & 225.[1 – 2(x-3).(4x^3-78x^2+418x-520)/-300].(x^4-26x^3+209x^2-520x)^2/90000 \\
& + 383.[1 – 2(x-5).(4x^3-72x^2+334x-312)/240].(x^4-24x^3+167x^2-312x)^2/57600 \\
& + 623.[1 – 2(x-8).(4x^3-63x^2+238x-195)/-600].(x^4-21x^3+119x^2-195x)^2/360000 \\
& + 993.[1 – 2(x-13).(4x^3-48x^2+158x-120)/5200].(x^4-16x^3+79x^2-120x)^2/27040000 \\
& + 75.(x^5-29x^4+287x^3-147x^2+1560x)^2/2433600 \\
& + 77.(x-3).(x^4-26x^3+209x^2-520x)^2/90000 \\
& + 80.(x-5).(x^4-24x^3+167x^2-312x)^2/57600 \\
& + 74.(x-8).(x^4-21x^3+119x^2-195x)^2/360000 \\
& + 72.(x-13).(x^4-16x^3+79x^2-120x)^2/27040000
\end{aligned}
$$
olarak bulunur.

$H_9(10) = 40562$ bulundu. HATA var!!! (700 civarında bir sonuç bekliyordum)

j. $H'_9(x)$hesaplandıktan sonra $H'_9(x) = 0$ için fonksiyonun tepe noktaları bulunur.

Bu noktalardan 5 civarındaki noktasında fonksiyonun değerine bakmak için;

$3 < x < 6$ noktalarında kök bulunup bulunmadığına baktıktan sonra Newton-Horner metoduyla bu noktaların yaklaşık değerlerini bulabiliriz.

Daha sonra da bu noktaları H_9'da yerine koyarsak çözüme ulaşabiliriz.

---

4. $P_3(x) = L_{30}.f(x_0) + L_{31}.f(x_1) + L_{32}.f(x_2) + L_{33}.f(x_3)$

$$P_3(x) = \frac{(x–0.5)(x–1)(x–2)}{(0-0.5)(0–1)(0–2)} . 0 + \frac{(x–0)(x–1)(x–2)}{(0.5–0)(0.5–1)(0.5–2)} . y + \frac{(x–0)(x–0.5)(x–2)}{(1–0)(1–0.5)(1–2)} . 3 + \frac{(x–0)(x–0.5)(x–1)}{(2–0)(2–0.5)(2–1)} . 2$$

Burada x^3'ün katsayıları toplamı : $8y / 3 - 6 + 4 / 3 = 6$ olduğundan;
$y = 5$ olarak bulunur.

---

5. **i.** $f(x) = x^3 + 3x^2 + 1$ fonksiyonunun köklerini Newton-Horner Yöntemi ile bulalım:

Elimizdeki fonksiyonu incelediğimizde $x = -4$ için $f(-4) < 0$ ve $x = -3$ için $f(-3) > 0$

Bunun dışında herhangi bir yerde fonksiyon işaret değiştirmiyor. Demek ki fonksiyonun reel tek kökü var.

	x^3	x^2	x^1	x^0		
$x_0 = p_0 = -4$	1	3	0	1		$p_n = p_{n-1} - \dfrac{P(p_{n-1})}{Q(p_{n-1})}$
		-4	4	-16		
	1	-1	4	-15	$\rightarrow$	$p_1 = -4 + 15/24 = -3.375$
$p_1 = -3.375$	1	3	0	1		
		-3.375	1.265625	-4.271484		
	1	-0.375	1.265625	-3.271484	$\rightarrow$	$p_2 = -3.375 + 3.27148/13.9218 = -3.14001$
$p_2 = -3.14001$	1	3	0	1		
		-3.14001	0.44609	-1.40163		
	1	-0.14001	0.44609	-0.40163	$\rightarrow$	$p_3 = -3.14198 + 0.40163/ 10.76 = -3.10458$
$p_3 = -3.10458$	1	3	0	1		
		-3.10458	0.32496	-1.00891		
	1	-0.10458	0.32496	-0.00891	$\rightarrow$	$P_4 = -3.10467 + 0.00891/ 10.28 = -3.1038$ bulunur

Bu fonksiyonun bulunabilen reel tek kökü : $x = -3.1038$

ii. $f(x) = x^3 - 7x^2 + 14x - 6$ fonksiyonunun köklerini bulalım:

Fonksiyonu dikkatlice incelediğimizde $f(0) < 0$ ve $f(1) > 0$

Demek ki $0 < x < 1$ aralığında fonksiyonun bir kökü var.

Ayrıca fonksiyonumuz $x = 3.3$ civarında kontrol edilirse $f(3.3) < 0$

Demek ki fonksiyonun $2 < x < 3.3$ ve $3.3 < x < 4$ aralıklarında iki kökü var.

Bunlardan yararlanarak iterasyon yöntemimizi uygularsak;

$x_0 = 0$ için

i	p_i	$Q(p_i)$	$P(p_i)$
0	0	14	-6
1	0.428571	8.55102	-1.207
2	0.569724	6.99762	-0.111039
3	0.585592	6.83047	-0.00132794
4	0.585786	6.82843	-4.74×10^{-7}

$x_0 = 2$ için

i	p_i	$Q(p_i)$	$P(p_i)$
0	2	-2	2
1	3	-1	0
2	3	-1	0

$x_0 = 4$ için

i	p_i	$Q(p_i)$	$P(p_i)$
0	4	6	2
1	3.66667	3	0.518519
2	3.49383	1.70691	0.114331
3	3.42685	1.25398	0.015319
4	3.41463	1.17427	0.0004877
5	3.41421	1.17158	8.45×10^{-7}